Kompleksna analiza

Pavle Pandžić, 10. predavanje

Prisjetimo se:

Weierstrassov pripremni teorem

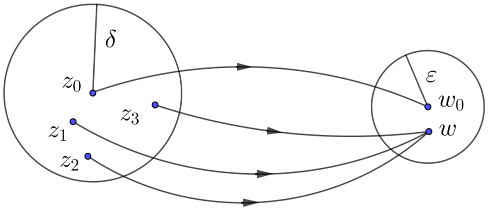
Neka je $f \in H(\Omega)$. Neka je $z_0 \in \Omega$; stavimo $w_0 = f(z_0)$. Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, i neka je taj red jednak m $(m \geq 1)$.

Prisjetimo se:

Weierstrassov pripremni teorem

Neka je $f \in H(\Omega)$. Neka je $z_0 \in \Omega$; stavimo $w_0 = f(z_0)$. Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, i neka je taj red jednak m ($m \geq 1$).

Tada postoje $\varepsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima točno m različitih nultočki u krugu $K(z_0, \delta)$, koje su sve reda 1.



Weierstrassov pripremni teorem za $m = 3$

Prisjetimo se:

Korolar

Neka je f holomorfna na Ω, $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$.

Prisjetimo se:

Korolar

Neka je f holomorfna na Ω, $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$.

Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda.

Prisjetimo se:

Korolar

Neka je f holomorfna na Ω, $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$.

Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda.

Tada postoje $\delta, \epsilon > 0$ takvi da je $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i $K(w_0, \epsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$.

Teorem o otvorenom preslikavanju

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna.

Teorem o otvorenom preslikavanju

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna.

Pretpostavimo da f nije konstanta niti na jednoj komponenti povezanosti od Ω.

Teorem o otvorenom preslikavanju

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna.

Pretpostavimo da f nije konstanta niti na jednoj komponenti povezanosti od Ω.

Tada je za svaki otvoren skup $U \subseteq \Omega$ skup $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ također otvoren.

Dokaz

Neka je $w_0 \in f(U)$, dakle $w_0 = f(z_0)$ za neki $z_0 \in U$.

Dokaz

Neka je $w_0 \in f(U)$, dakle $w_0 = f(z_0)$ za neki $z_0 \in U$.

Tvrdimo da funkcija $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda.

Dokaz

Neka je $w_0 \in f(U)$, dakle $w_0 = f(z_0)$ za neki $z_0 \in U$.

Tvrdimo da funkcija $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda.

Da to dokažemo, pretpostavimo da je z_0 nultočka od F beskonačnog reda.

Dokaz

Neka je $w_0 \in f(U)$, dakle $w_0 = f(z_0)$ za neki $z_0 \in U$.

Tvrdimo da funkcija $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda.

Da to dokažemo, pretpostavimo da je z_0 nultočka od F beskonačnog reda.

Tada je $F = 0$ na nekom krugu oko z_0. Po principu jedinstvenosti, $F = 0$ na komponenti povezanosti od Ω koja sadrži z_0.

Dokaz

Neka je $w_0 \in f(U)$, dakle $w_0 = f(z_0)$ za neki $z_0 \in U$.

Tvrdimo da funkcija $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda.

Da to dokažemo, pretpostavimo da je z_0 nultočka od F beskonačnog reda.

Tada je $F = 0$ na nekom krugu oko z_0. Po principu jedinstvenosti, $F = 0$ na komponenti povezanosti od Ω koja sadrži z_0.

Slijedi da je $f(z)$ konstanta w_0 na toj komponenti povezanosti, što je kontradikciija s pretpostavkom.

Dakle doista $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, pa možemo primijeniti Korolar Weierstrassovog pripremnog teorema i zaključiti da postoje $\delta, \epsilon > 0$ takvi da je $K(w_0, \epsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$.

Dakle doista $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, pa možemo primijeniti Korolar Weierstrassovog pripremnog teorema i zaključiti da postoje $\delta, \epsilon > 0$ takvi da je $K(w_0, \epsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$.

Ako je potrebno, možemo smanjiti δ tako da još bude i $K(z_0, \delta) \subseteq U$.

Dakle doista $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, pa možemo primijeniti Korolar Weierstrassovog pripremnog teorema i zaključiti da postoje $\delta, \epsilon > 0$ takvi da je $K(w_0, \epsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$.

Ako je potrebno, možemo smanjiti δ tako da još bude i $K(z_0, \delta) \subseteq U$.

U tom slučaju vidimo da je $K(w_0, \epsilon) \subseteq f(U)$, pa smo našli otvoren krug oko w_0 koji je sadržan u $f(U)$.

Dakle doista $F(z) = f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, pa možemo primijeniti Korolar Weierstrassovog pripremnog teorema i zaključiti da postoje $\delta, \epsilon > 0$ takvi da je $K(w_0, \epsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$.

Ako je potrebno, možemo smanjiti δ tako da još bude i $K(z_0, \delta) \subseteq U$.

U tom slučaju vidimo da je $K(w_0, \epsilon) \subseteq f(U)$, pa smo našli otvoren krug oko w_0 koji je sadržan u $f(U)$.

Kako je $w_0 \in f(U)$ bio proizvoljan, to dokazuje otvorenost skupa $f(U)$. $\square$

Teorem o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije

Neka je f holomorfna funkcija na Ω i neka je $z_0 \in \Omega$ tako da je $f'(z_0) \neq 0$.

Teorem o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije

Neka je f holomorfna funkcija na Ω i neka je $z_0 \in \Omega$ tako da je $f'(z_0) \neq 0$.

Tada postoje otvoreni skupovi $U \subseteq \Omega$, $V \subseteq f(\Omega)$ takvi da je $z_0 \in U$, da je $f\big|_U : U \to V$ bijekcija, i da je $(f\big|_U)^{-1} : V \to U$ holomorfna funkcija.

Teorem o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije

Neka je f holomorfna funkcija na Ω i neka je $z_0 \in \Omega$ tako da je $f'(z_0) \neq 0$.

Tada postoje otvoreni skupovi $U \subseteq \Omega$, $V \subseteq f(\Omega)$ takvi da je $z_0 \in U$, da je $f\big|_U : U \to V$ bijekcija, i da je $(f\big|_U)^{-1} : V \to U$ holomorfna funkcija.

Nadalje, vrijedi

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \qquad w \in V.$$

Dokaz

Za funkciju $F(z) = f(z) - w_0$ vrijedi $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, pa funkcija F ima nultočku reda 1 u z_0.

Dokaz

Za funkciju $F(z) = f(z) - w_0$ vrijedi $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, pa funkcija F ima nultočku reda 1 u z_0.

Sada Weierstrassov pripremni teorem povlači da postoje $\epsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \epsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima točno jednu nultočku u $K(z_0, \delta)$, odnosno postoji jedinstveni $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$.

Dokaz

Za funkciju $F(z) = f(z) - w_0$ vrijedi $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, pa funkcija F ima nultočku reda 1 u z_0.

Sada Weierstrassov pripremni teorem povlači da postoje $\epsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \epsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima točno jednu nultočku u $K(z_0, \delta)$, odnosno postoji jedinstveni $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$.

Sada definiramo otvorene skupove $V = K(w_0, \epsilon) \subseteq f(\Omega)$ i $U = f^{-1}(K(w_0, \epsilon)) \cap K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$.

Dokaz

Za funkciju $F(z) = f(z) - w_0$ vrijedi $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, pa funkcija F ima nultočku reda 1 u z_0.

Sada Weierstrassov pripremni teorem povlači da postoje $\epsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \epsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima točno jednu nultočku u $K(z_0, \delta)$, odnosno postoji jedinstveni $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$.

Sada definiramo otvorene skupove $V = K(w_0, \epsilon) \subseteq f(\Omega)$ i $U = f^{-1}(K(w_0, \epsilon)) \cap K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$.

Iz gornjega vidimo da je $f\big|_U$ bijekcija sa U na V, dakle postoji funkcija $(f\big|_U)^{-1} : V \to U$.

Smanjujući δ ako je potrebno, možemo pretpostaviti da je $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in K(z_0, \delta)$, pa f nije konstanta niti na jednoj komponenti povezanosti od U.

Smanjujući δ ako je potrebno, možemo pretpostaviti da je $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in K(z_0, \delta)$, pa f nije konstanta niti na jednoj komponenti povezanosti od U.

Zato možemo primijeniti Teorem o otvorenom preslikavanju i zaključiti da je $(f\big|_U)^{-1} : V \to U$ neprekidna funkcija (zato što je za svaki otvoren $U' \subseteq U$, njegova praslika $(f^{-1})^{-1}(U') = f(U')$ otvoren podskup od V).

Sada za $z \in U$ označimo $w = f(z) \in V$.

Sada za $z \in U$ označimo $w = f(z) \in V$.

Zbog neprekidnosti f i f^{-1} slijedi da je $z' \to z$ ekvivalentno sa $w' = f(z') \to f(z) = w$.

Sada za $z \in U$ označimo $w = f(z) \in V$.

Zbog neprekidnosti f i f^{-1} slijedi da je $z' \to z$ ekvivalentno sa $w' = f(z') \to f(z) = w$.

Zato vrijedi

$$\lim_{w' \to w} \frac{f^{-1}(w') - f^{-1}(w)}{w' - w} = \lim_{w' \to w} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \lim_{z' \to z} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Sada za $z \in U$ označimo $w = f(z) \in V$.

Zbog neprekidnosti f i f^{-1} slijedi da je $z' \to z$ ekvivalentno sa $w' = f(z') \to f(z) = w$.

Zato vrijedi

$$\lim_{w' \to w} \frac{f^{-1}(w') - f^{-1}(w)}{w' - w} = \lim_{w' \to w} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \lim_{z' \to z} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Odatle slijedi da je f^{-1} holomorfna i da vrijedi

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}. \qquad \square$$

Teorem o holomorfnom izomorfizmu

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektivna i holomorfna funkcija. Tada

Teorem o holomorfnom izomorfizmu

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektivna i holomorfna funkcija. Tada

1. $f'(z) \neq 0$, za svaki $z \in \Omega$;

Teorem o holomorfnom izomorfizmu

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektivna i holomorfna funkcija. Tada

1. $f'(z) \neq 0$, za svaki $z \in \Omega$;
2. $V = f(\Omega)$ je otvoren skup;

Teorem o holomorfnom izomorfizmu

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektivna i holomorfna funkcija. Tada

1. $f'(z) \neq 0$, za svaki $z \in \Omega$;
2. $V = f(\Omega)$ je otvoren skup;
3. $f^{-1} : V \to \Omega$ je holomorfna funkcija.

Teorem o holomorfnom izomorfizmu

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektivna i holomorfna funkcija. Tada

1. $f'(z) \neq 0$, za svaki $z \in \Omega$;
2. $V = f(\Omega)$ je otvoren skup;
3. $f^{-1} : V \to \Omega$ je holomorfna funkcija.

Drugim riječima, $f : \Omega \to V = f(\Omega)$ je holomorfni izomorfizam, tj. holomorfna bijekcija kojoj je i inverz holomorfan.

Dokaz

Za svaki $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima nultočku konačnog reda u z_0. (Inače bi f bila konstanta na okolini z_0, što ne može biti zbog injektivnosti.)

Dokaz

Za svaki $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima nultočku konačnog reda u z_0. (Inače bi f bila konstanta na okolini z_0, što ne može biti zbog injektivnosti.)

Dakle možemo koristiti WPT, s tim da zbog zaključka da funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima m različitih nultočaka i zbog injektivnosti funkcije f slijedi da m mora biti 1.

Dakle funkcija $F(z) = f(z) - w_0$ ima nultočku reda 1 u z_0, pa je $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. To dokazuje tvrdnju 1.

Dakle funkcija $F(z) = f(z) - w_0$ ima nultočku reda 1 u z_0, pa je $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. To dokazuje tvrdnju 1.

Tvrdnja 2. slijedi iz Teorema o otvorenom preslikavanju, a tvrdnja 3. slijedi iz Teorema o lokalnoj invertibilnosti. $\square$

Teorem (Princip maksimuma modula)

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna nekonstantna funkcija.

Teorem (Princip maksimuma modula)

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna nekonstantna funkcija.

Tada za svaki $z \in \Omega$ vrijedi

$$|f(z)| < \sup_{w \in \Omega} |f(w)|.$$

Teorem (Princip maksimuma modula)

Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna nekonstantna funkcija.

Tada za svaki $z \in \Omega$ vrijedi

$$|f(z)| < \sup_{w \in \Omega} |f(w)|.$$

Drugim riječima, funkcija $z \mapsto |f(z)|$ ne postiže maksimum na Ω.

Dokaz

Neka je $z \in \Omega$ fiksiran. Po Teoremu o otvorenom preslikavanju, $f(\Omega)$ je otvoren skup.

Dokaz

Neka je $z \in \Omega$ fiksiran. Po Teoremu o otvorenom preslikavanju, $f(\Omega)$ je otvoren skup.

Taj skup sadrži $f(z)$, pa postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K(f(z), \epsilon) \subseteq f(\Omega)$.

Dokaz

Neka je $z \in \Omega$ fiksiran. Po Teoremu o otvorenom preslikavanju, $f(\Omega)$ je otvoren skup.

Taj skup sadrži $f(z)$, pa postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K(f(z), \epsilon) \subseteq f(\Omega)$.

Tvrdimo da u svakom krugu $K(w, r)$ postoje točke koje imaju veći modul nego središte kruga w.

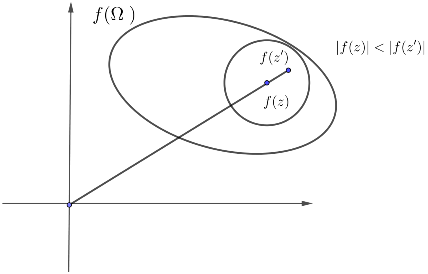
Doista, ako je $w \neq 0$, i ako uzmemo dovoljno mali realni $t > 1$ takav da je $tw \in K(w, r)$, tada je $|tw| = t|w| > |w|$.

Doista, ako je $w \neq 0$, i ako uzmemo dovoljno mali realni $t > 1$ takav da je $tw \in K(w, r)$, tada je $|tw| = t|w| > |w|$.

Ako je pak $w = 0$, onda bilo koji $w' \in K^*(w, r)$ zadovoljava $|w'| > |w|$.

Doista, ako je $w \neq 0$, i ako uzmemo dovoljno mali realni $t > 1$ takav da je $tw \in K(w, r)$, tada je $|tw| = t|w| > |w|$.

Ako je pak $w = 0$, onda bilo koji $w' \in K^*(w, r)$ zadovoljava $|w'| > |w|$.



Slijedi da postoji $f(z') \in K(f(z), \epsilon)$ sa svojstvom $|f(z')| > |f(z)|$. To povlači tvrdnju. $\square$

Korolar (Princip maksimuma modula za krug)

Neka je $f : \overline{K}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je f holomorfna na $K(z_0, r)$.

Korolar (Princip maksimuma modula za krug)

Neka je $f : \overline{K}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je f holomorfna na $K(z_0, r)$.

Tada je

$$\max_{|z-z_0|\leq r} |f(z)| = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Korolar (Princip maksimuma modula za krug)

Neka je $f : \overline{K}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je f holomorfna na $K(z_0, r)$.

Tada je

$$\max_{|z-z_0|\leq r} |f(z)| = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Drugim riječima, maksimum funkcije $|f(z)|$ na krugu jednak je maksimumu na kružnici.

Dokaz

Primijetimo prvo da neprekidna funkcija $|f|$ na kompaktnom skupu $\overline{K}(z_0, r)$ postiže maksimum.

Dokaz

Primijetimo prvo da neprekidna funkcija $|f|$ na kompaktnom skupu $\overline{K}(z_0, r)$ postiže maksimum.

Pretpostavimo da se taj maksimum ne postiže na kružnici. Tada se maksimum postiže na otvorenom krugu $K(z_0, r)$.

Dokaz

Primijetimo prvo da neprekidna funkcija $|f|$ na kompaktnom skupu $\overline{K}(z_0, r)$ postiže maksimum.

Pretpostavimo da se taj maksimum ne postiže na kružnici. Tada se maksimum postiže na otvorenom krugu $K(z_0, r)$.

Sada Princip maksimuma modula povlači da f mora biti konstanta na $K(z_0, r)$, a onda je zbog neprekidnosti konstanta i na $\overline{K}(z_0, r)$.

Dokaz

Primijetimo prvo da neprekidna funkcija $|f|$ na kompaktnom skupu $\overline{K}(z_0, r)$ postiže maksimum.

Pretpostavimo da se taj maksimum ne postiže na kružnici. Tada se maksimum postiže na otvorenom krugu $K(z_0, r)$.

Sada Princip maksimuma modula povlači da f mora biti konstanta na $K(z_0, r)$, a onda je zbog neprekidnosti konstanta i na $\overline{K}(z_0, r)$.

Dakle se maksimum ipak postiže na kružnici pa smo dobili kontradikciju. $\square$

Teorem (Schwarzova lema)

Neka je $f : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f(K(0,1)) \subseteq K(0,1)$ i $f(0) = 0$.

Teorem (Schwarzova lema)

Neka je $f : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f(K(0,1)) \subseteq K(0,1)$ i $f(0) = 0$.

Tada je istinita točno jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

1. $|f(z)| < |z|$ za svaki $z \in K^*(0,1)$ i $|f'(0)| < 1$;

Teorem (Schwarzova lema)

Neka je $f : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f(K(0,1)) \subseteq K(0,1)$ i $f(0) = 0$.

Tada je istinita točno jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

1. $|f(z)| < |z|$ za svaki $z \in K^*(0,1)$ i $|f'(0)| < 1$;
2. postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $f(z) = e^{i\alpha} z$ za svaki $z \in K(0,1)$, tj. f je rotacija oko 0 za kut α.

Dokaz

Zbog $f(0) = 0$, Taylorov razvoj funkcije f oko 0 je

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots, \qquad z \in K(0,1).$$

Dokaz

Zbog $f(0) = 0$, Taylorov razvoj funkcije f oko 0 je

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots, \qquad z \in K(0,1).$$

Dijeljenjem sa z vidimo da funkcija $\frac{f(z)}{z}$ ima uklonjiv singularitet u 0, i da je funkcija

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

holomorfna na $K(0,1)$.

Dokaz

Zbog $f(0) = 0$, Taylorov razvoj funkcije f oko 0 je

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots, \qquad z \in K(0,1).$$

Dijeljenjem sa z vidimo da funkcija $\frac{f(z)}{z}$ ima uklonjiv singularitet u 0, i da je funkcija

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

holomorfna na $K(0,1)$.

(Taylorov red funkcije g na $K(0,1)$ je

$$g(z) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}z + \dots).$$

Za $z \in K(0,1)$ uzmimo r između $|z|$ i 1.

Za $z \in K(0,1)$ uzmimo r između $|z|$ i 1.

Po principu maksimuma modula za krug, vrijedi

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)|. \tag{1}$$

Za $z \in K(0,1)$ uzmimo r između $|z|$ i 1.

Po principu maksimuma modula za krug, vrijedi

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)|. \tag{1}$$

Kako je $f(w) \in K(0,1)$ vrijedi $|f(w)| < 1$, pa iz $|w| = r$ slijedi

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{|w|} < \frac{1}{r}.$$

Za $z \in K(0,1)$ uzmimo r između $|z|$ i 1.

Po principu maksimuma modula za krug, vrijedi

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)|. \tag{1}$$

Kako je $f(w) \in K(0,1)$ vrijedi $|f(w)| < 1$, pa iz $|w| = r$ slijedi

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{|w|} < \frac{1}{r}.$$

Dakle (1) povlači da je $|g(z)| < \frac{1}{r}$, za svaki r između $|z|$ i 1.

Za $z \in K(0,1)$ uzmimo r između $|z|$ i 1.

Po principu maksimuma modula za krug, vrijedi

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)|. \tag{1}$$

Kako je $f(w) \in K(0,1)$ vrijedi $|f(w)| < 1$, pa iz $|w| = r$ slijedi

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{|w|} < \frac{1}{r}.$$

Dakle (1) povlači da je $|g(z)| < \frac{1}{r}$, za svaki r između $|z|$ i 1.

Za $r \to 1$ dobivamo $|g(z)| \leq 1$. To vrijedi za svaki $z \in K(0,1)$.

Sada imamo dvije mogućnosti:

1. $|g(z)| < 1$, $\forall z \in K(0, 1)$. Odavde odmah slijedi da vrijedi tvrdnja (1) iz iskaza.

Sada imamo dvije mogućnosti:

1. $|g(z)| < 1, \forall z \in K(0,1)$. Odavde odmah slijedi da vrijedi tvrdnja (1) iz iskaza.
2. $|g(z)| = 1$ za neki $z \in K(0,1)$. Tada $|g|$ postiže maksimum na $K(0,1)$, pa po principu maksimuma modula g mora biti konstanta.

Sada imamo dvije mogućnosti:

1. $|g(z)| < 1$, $\forall z \in K(0,1)$. Odavde odmah slijedi da vrijedi tvrdnja (1) iz iskaza.

2. $|g(z)| = 1$ za neki $z \in K(0,1)$. Tada $|g|$ postiže maksimum na $K(0,1)$, pa po principu maksimuma modula g mora biti konstanta.

   Štoviše, ta konstanta mora biti modula 1, dakle oblika $e^{i\alpha}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Odavde slijedi tvrdnja (2) iz iskaza. $\square$

Sljedeći teorem, koji navodimo samo informativno, je jedan od glavnih rezultata o holomorfnim funkcijama.

Sljedeći teorem, koji navodimo samo informativno, je jedan od glavnih rezultata o holomorfnim funkcijama.

Prisjetimo se da je područje $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano ako je svaka petlja (zatvoren put) u Ω nul-homotopna u Ω.

Riemannov Teorem o preslikavanju

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje različito od cijelog $\mathbb{C}$. Neka je $z_0 \in \Omega$.

Riemannov Teorem o preslikavanju

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje različito od cijelog $\mathbb{C}$. Neka je $z_0 \in \Omega$.

Tada postoji jedinstven holomorfni izomorfizam $F : \Omega \to K(0,1)$ takav da vrijedi

1. $F(z_0) = 0$;

Riemannov Teorem o preslikavanju

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje različito od cijelog $\mathbb{C}$. Neka je $z_0 \in \Omega$.

Tada postoji jedinstven holomorfni izomorfizam $F : \Omega \to K(0,1)$ takav da vrijedi

1. $F(z_0) = 0$;
2. $F'(z_0)$ je pozitivan realan broj.

Napomena

Tvrdnja Riemannovog Teorema o preslikavanju ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C}$.

Napomena

Tvrdnja Riemannovog Teorema o preslikavanju ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C}$.

Naime, po Liouvilleovom teoremu, svaka holomorfna funkcija $F : \mathbb{C} \to K(0,1)$ mora biti konstanta, pa ne može biti holomorfni izomorfizam.

Dokaz jedinstvenosti

Pretpostavimo da su $F, G : \Omega \to K(0,1)$ dva holomorfna izomorfizma takva da vrijedi $F(z_0) = G(z_0) = 0$ i da su $F'(z_0)$ i $G'(z_0)$ pozitivni realni brojevi.

Dokaz jedinstvenosti

Pretpostavimo da su $F, G : \Omega \to K(0,1)$ dva holomorfna izomorfizma takva da vrijedi $F(z_0) = G(z_0) = 0$ i da su $F'(z_0)$ i $G'(z_0)$ pozitivni realni brojevi.

Tada je $f = G \circ F^{-1} : K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna bijekcija koja zadovoljava

$$f(0) = 0; \qquad f'(0) \in \mathbb{R}^+.$$

Dokaz jedinstvenosti

Pretpostavimo da su $F, G : \Omega \to K(0,1)$ dva holomorfna izomorfizma takva da vrijedi $F(z_0) = G(z_0) = 0$ i da su $F'(z_0)$ i $G'(z_0)$ pozitivni realni brojevi.

Tada je $f = G \circ F^{-1} : K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna bijekcija koja zadovoljava

$$f(0) = 0; \qquad f'(0) \in \mathbb{R}^+.$$

Nadalje, funckija f^{-1} zadovoljava ista ta svojstva.

Po Schwarzovoj lemi zaključujemo da je ili

$$|f(z)| < |z|, \ \forall z \in K(0,1) \qquad \text{i} \qquad f'(0) < 1, \tag{2}$$

Po Schwarzovoj lemi zaključujemo da je ili

$$|f(z)| < |z|, \ \forall z \in K(0,1) \qquad \text{i} \qquad f'(0) < 1, \tag{2}$$

ili postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \qquad \forall z \in K(0,1). \tag{3}$$

Po Schwarzovoj lemi zaključujemo da je ili

$$|f(z)| < |z|, \ \forall z \in K(0,1) \qquad \text{i} \qquad f'(0) < 1, \tag{2}$$

ili postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \qquad \forall z \in K(0,1). \tag{3}$$

Posebno je

$$|f(z)| \leq |z|, \qquad \forall z \in K(0,1). \tag{4}$$

Isto vrijedi i za f^{-1}; posebno vrijedi

$$|f^{-1}(w)| \leq |w|, \qquad \forall w \in K(0,1). \tag{5}$$

Isto vrijedi i za f^{-1}; posebno vrijedi

$$|f^{-1}(w)| \leq |w|, \qquad \forall w \in K(0,1). \tag{5}$$

Za $w = f(z)$ imamo $z = f^{-1}(w)$, pa (5) povlači $|z| \leq |f(z)|$, $\forall z \in K(0,1)$, što zajedno s (4) daje $|f(z)| = |z|$, $\forall z \in K(0,1)$.

Slijedi da funkcija f zadovoljava tvrdnju (3), a ne tvrdnju (2).

Slijedi da funkcija f zadovoljava tvrdnju (3), a ne tvrdnju (2).

Dakle $f(z) = e^{i\alpha} z$, $\forall z \in K(0,1)$, odakle slijedi

$$f'(z) = e^{i\alpha}, \qquad \forall z \in K(0,1).$$

Slijedi da funkcija f zadovoljava tvrdnju (3), a ne tvrdnju (2).

Dakle $f(z) = e^{i\alpha} z$, $\forall z \in K(0,1)$, odakle slijedi

$$f'(z) = e^{i\alpha}, \qquad \forall z \in K(0,1).$$

Kako također vrijedi $f'(0) > 0$, slijedi da je $e^{i\alpha} = 1$, pa je $f(z) = z$, $\forall z \in K(0,1)$.

Slijedi da funkcija f zadovoljava tvrdnju (3), a ne tvrdnju (2).

Dakle $f(z) = e^{i\alpha} z$, $\forall z \in K(0,1)$, odakle slijedi

$$f'(z) = e^{i\alpha}, \qquad \forall z \in K(0,1).$$

Kako također vrijedi $f'(0) > 0$, slijedi da je $e^{i\alpha} = 1$, pa je $f(z) = z$, $\forall z \in K(0,1)$.

Slijedi da je $F = G$. $\square$

Napomena

Iz dokaza vidimo što se dešava s jedinstvenosti ako izbacimo uvjet $F'(z_0) \in \mathbb{R}^+$: tada je F jedinstven do na rotaciju kruga $K(0,1)$.

Napomena

Iz dokaza vidimo što se dešava s jedinstvenosti ako izbacimo uvjet $F'(z_0) \in \mathbb{R}^+$: tada je F jedinstven do na rotaciju kruga $K(0,1)$.

Drugim riječima, ako su F i G dva holomorfna izomorfizma $\Omega \to K(0,1)$ takva da je $F(z_0) = G(z_0) = 0$, onda postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $G(z) = e^{i\alpha} F(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Dokaz egzistencije

je znatno teži i dulji i zahtijeva korištenje nekoliko drugih netrivijalnih rezultata.

Dokaz egzistencije

je znatno teži i dulji i zahtijeva korištenje nekoliko drugih netrivijalnih rezultata.

Skicu dokaza pomoću Dirichletovog principa za harmonijske funkcije, uz dodatne pretpostavke na Ω, možete vidjeti na

https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_mapping_theorem

Potpuni dokaz pomoću Montelovog teorema i Hurwitzovog teorema možete vidjeti na

https://math.berkeley.edu/~vvdatar/m185f16/notes/Riemann_Mapping.pdf

Potpuni dokaz pomoću Montelovog teorema i Hurwitzovog teorema možete vidjeti na

https://math.berkeley.edu/~vvdatar/m185f16/notes/Riemann_Mapping.pdf

Nešto drukčiji dokaz možete naći na

https://www.maths.usyd.edu.au/u/tillmann/2007-complex/ComAna-Lectures.pdf